Turunan Numerik

Bahan Kuliah IF4058 Topik Khusus Informatika I

Oleh; Rinaldi Munir (IF-STEI ITB)

Definisi Turunan (derivatif)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Bila persamaan fungsi $f(x)$ diberikan secara eksplisit, maka kita dapat menentukan fungsi turunannya, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n+1)}(x)$, lalu menggunakannya untuk menghitung nilai turunan fungsi di $x = t$.

- Tetapi jika fungsi $f(x)$ tidak diketahui secara eksplisit, tetapi kita hanya memiliki beberapa titik data saja. Pada kasus seperti ini kita tidak dapat menemukan nilai turunan fungsi secara analitik.

- Sebaliknya, pada kasus lain, meskipun $f(x)$ diketahui secara eksplisit tetapi bentuknya rumit sehingga menentukan fungsi turunannya merupakan pekerjaan yang tidak mangkus

Persoalan Turunan Numerik

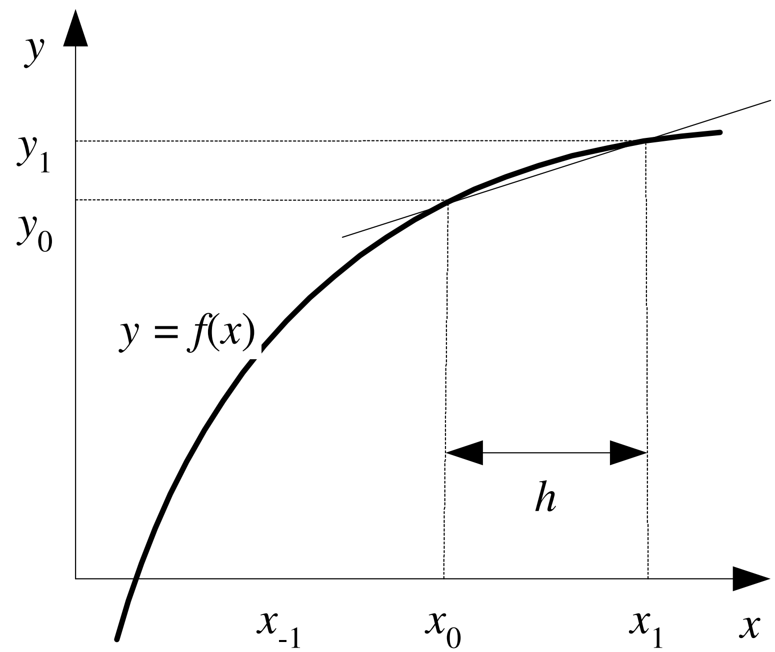
- Persoalan turunan numerik ialah menentukan hampiran nilai turunan fungsi *f* yang diberikan dalam bentuk tabel.

- Tiga pendekatan dalam menghitung turunan numerik:

  1. Hampiran selisih maju
  2. Hampiran selisih mundur
  3. Hampiran selisih pusat

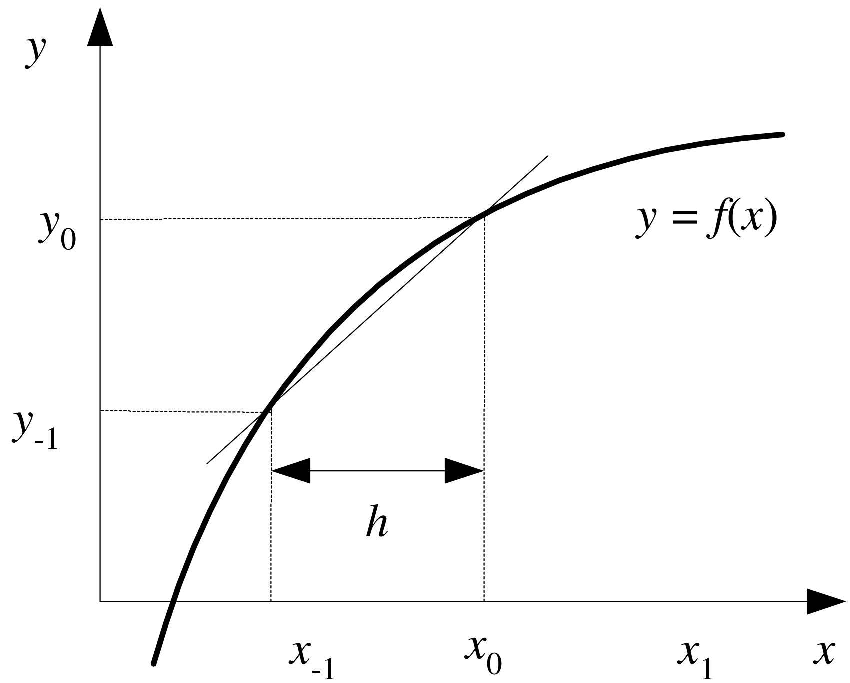
1. Hampiran Selisih Maju (*forward difference approximation*)

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$



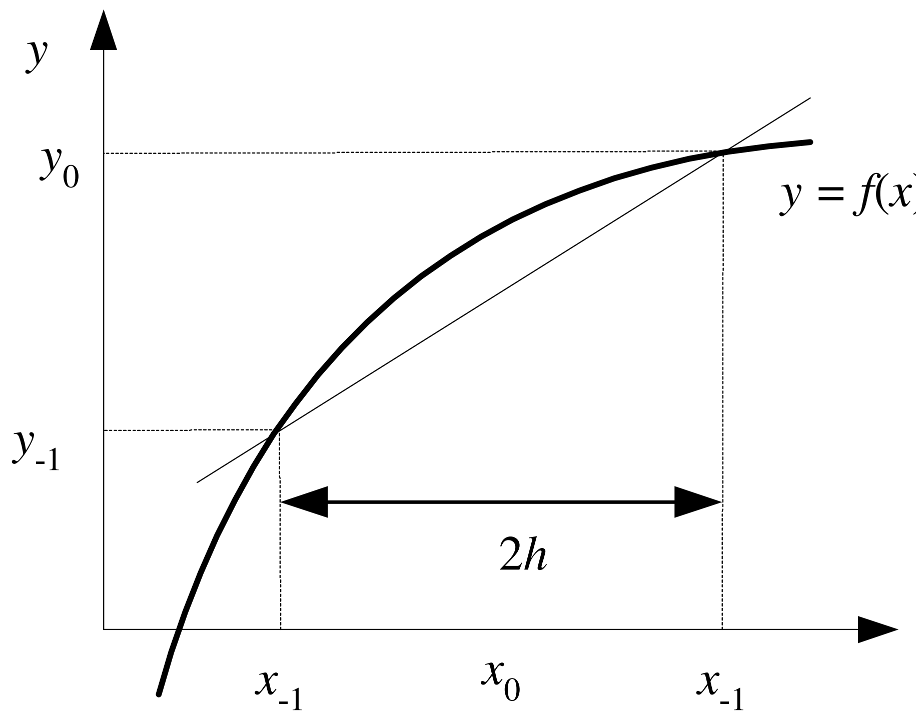
2. Hampiran selisih-mundur *(backward difference approximation)*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \frac{f_0 - f_1}{h}$$



3. Hampiran selisih-pusat *(central difference approximation)*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$



- Rumus-rumus turunan numerik untuk ketiga pendekatan tersebut dapat diturunkan dengan dua cara, yaitu:

  1. Dengan bantuan deret Taylor
  2. Dengan hampiran polinom interpolasi

- Kedua cara tersebut menghasilkan rumus yang sama.

Penurunan Rumus dengan Deret Taylor

(a) Hampiran selisih-maju

Uraikan $f(x_{i+1})$ di sekitar x_i :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \ldots$$

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + h^2/2\, f_i'' + \ldots$$

$$hf_i' = f_{i+1} - f_i - h^2/2\, f_i'' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - h/2\, f_i''$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

yang dalam hal ini, $O(h) = h/2\, f''(t)$, $x_i < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di x_0 dan x_1 persamaan rumusnya menjadi:

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$$

yang dalam hal ini $O(h) = h/2\, f''(t)$, $x_i < t < x_{i+1}$.

(b) Hampiran selisih-mundur

Uraikan $f(x_{i-1})$ di sekitar x_i :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \ldots$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + h^2/2\, f_i'' + \ldots$$

$$hf_i' = f_i - f_{i-1} + h^2/2\, f_i'' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - h/2\, f_i'' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h),$$

yang dalam hal ini, $O(h) = - h/2\, f''(t)$, $x_{i-1} < t < x_i$

Untuk nilai-nilai f di x_0 dan x_{-1} persamaan rumusnya menjadi:

$$f_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h)$$

yang dalam hal ini, $O(h) = - h/2 f''(t)$, $x_{i+1} < t < x_i$.

(a) Hampiran selisih-pusat

Kurangkan persamaan (P.7.4) dengan persamaan (P.7.6):

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf_i' + h^3/3\, f_i''' + \ldots$$

$$2hf_i' = f_{i+1} - f_{i-1} - h^3/3\, f_i''' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - h^2/6\, f_i''' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2),$$

yang dalam hal ini, $O(h^2) = - h^2/6\, f'''(t)$, $x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di x_{-1} dan x_1 persamaan rumusnya menjadi:

$$f_o' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

yang dalam hal ini, $O(h^2) = - h/6\, f'''(t)$, $x_{i-1} < t < x_{i+1}$.

Rumus untuk Turunan Kedua, *f''*(*x*), dengan Bantuan Deret Taylor

(a) Hampiran selisih-pusat

Tambahkan persamaan (P.7.4) dengan persamaan (P.7.6) di atas :

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i'' + h^4/12\, f_i^{(4)} + \dots$$

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = h^2 f_i'' + h^4/12\, f_i^{(4)}$$

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} - h^2/12\, f_i^{(4)}$$

Jadi,

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2),$$

yang dalam hal ini, $O(h^2) = -h^2/12\, f^{(4)}(t)$, $x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di x_{-1} , x_0, dan x_1 persamaan rumusnya menjadi:

$$f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_1}{h^2} + O(h^2)$$

yang dalam hal ini $O(h^2) = - h^2/12\, f^{(4)}(t)$, $x_{i-1} < t < x_{i+1}$.

(b) Hampiran selisih-mundur

Dengan cara yang sama seperti (a) di atas, diperoleh :

$$f_i'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h),$$

yang dalam hal ini $O(h) = h\,f''(t)$, $x_{i-2} < t < x_i$

Untuk nilai-nilai f di x_{-2} , x_{-1}, dan x_0 persamaan rumusnya :

$$f_0'' = \frac{f_{-2} - 2f_{-1} + f_0}{h^2} + O(h),$$

yang dalam hal ini, $O(h) = h\,f''(t)$, $x_{i-2} < t < x_i$

(c) Hampiran selisih-maju

Dengan cara yang sama seperti di atas, diperoleh :

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h),$$

yang dalam hal ini, $O(h) = - h f''(t)$, $x_i < t < x_{i+2}$

Untuk nilai-nilai f di x_0 , x_1, dan x_2 persamaan rumusnya :

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h),$$

yang dalam hal ini, $O(h) = - h f''(t)$, $x_1 < t < x_{i+2}$.

Penurunan Rumus Turunan Numerik dengan Polinom Interpolasi

- Polinom Newton-Gregory:

$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + \frac{s\Delta f_0}{1!} + s(s\text{-}1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + s(s\text{-}1)(s\text{-}2)\frac{\Delta^3 f_0}{3!} + s(s\text{-}1)(s\text{-}2)\ldots(s\text{-}n+1)\frac{\Delta^n f_0}{n!}$$

$$= F(s)$$

yang dalam hal ini, $s = (x\text{-}x_0)/h$.

$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + \frac{s\Delta f_0}{1!} + s(s\text{-}1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + s(s\text{-}1)(s\text{-}2)\frac{\Delta^3 f_0}{3!} +$$

$$s(s\text{-}1)(s\text{-}2)...(s\text{-}\ n{+}1)\frac{\Delta^n f_0}{n!}$$

$$= F(s)$$

yang dalam hal ini, $s = (x\text{-}x_0)/h$.

(a) Hampiran selisih-maju

- bila digunakan titik-titik x_0 dan x_1 :

$$f'(x_0) = 1/h\ (\Delta f_0) = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

- bila digunakan titik-titik x_0, x_1, dan x_2 :

$$f'(x_0) = 1/h\ (\Delta f_0 + (s - 1/2)\ \Delta^2 f_0)$$

untuk titik $x_0 \rightarrow s = (x_0 - x_0)/h = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= 1/h\ (\Delta f_0 - 1/2\Delta^2 f_0) \\ &= 1/h\ (\Delta f_0 - 1/2(\Delta f_1 - \Delta f_0)) \\ &= 1/h\ (3/2\ \Delta f_0 - 1/2\ \Delta f_1) \\ &= 1/h\ (3/2\, f_1 - 3/2\, f_0 - 1/2\, f_2 + 1/2\, f_1) \\ &= 1/h\ (-3/2\, f_0 + 2\, f_1 - 1/2\, f_2) \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

(b) Hampiran selisih-mundur

- polinom interpolasi: Newton-Gregory mundur
- bila digunakan titik-titik x_0 dan x_{-1} :

$$f'(x_0) = 1/h\ (\nabla f_0) = \frac{f_0 - f_{-1}}{h}$$

(c) Hampiran selisih-pusat

- digunakan tiga titik x_0 , x_1 , dan x_2 :

$$f'(x_0) = 1/h\ (\Delta f_0 + (s - 1/2)\ \Delta^2 f_0)$$

untuk titik $x_1 \rightarrow s = (x_1 - x_0)/h = h/h = 1$, sehingga

$$f'(x_1) = 1/h\ (\Delta f_0 + 1/2\Delta^2 f_0)$$

$$= 1/h\ (\Delta f_0 + 1/2(\Delta f_1 - \Delta f_0)\ )$$

$$= 1/h\ (1/2\ \Delta f_0 + 1/2\ \Delta f_1)$$

$$= 1/2h\ (\ f_1 - f_0 + f_2 - f_1\ )$$

$$= \frac{f_2 - f_0}{2h}$$

untuk titik x_{-1} , x_0 , dan x_1 :

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

Rumus untuk Turunan Kedua, *f* "(*x*), dengan Polinom Interpolasi

Turunan kedua *f* adalah

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{ds}{dx}$$

$$= 1/h\ (0 + \Delta^2 f_0 + (s - 1)\ \Delta^3 f_0\ )\ .\ 1/h$$

$$= 1/h^2\ (\Delta^2 f_0 + (\ s - 1)\ \Delta^3 f_0\ )$$

Misalkan untuk hampiran selisih-pusat, titik-titik yang digunakan x_0 , x_1 , dan x_2 :

- pada titik $x_1 \rightarrow s = (x_1 - x_0)/h = h/h = 1$, sehingga

$$f''(x_1) = 1/h^2 (\Delta^2 f_0 + (1 - 1) \Delta^3 f_0)$$
$$= 1/h^2 (\Delta^2 f_0)$$
$$= 1/h^2 (\Delta f_1 - \Delta f_0)$$
$$= 1/h^2 (f_2 - f_1 + f_1 + f_0)$$
$$= 1/h^2 (f_0 - 2f_1 + f_2)$$

- untuk titik x_{-1} , x_0 , dan x_1 :

$$f''(x_0) = \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2}$$

Ringkasan Rumus-Rumus Turunan

1. Rumus untuk turunan pertama

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h) \qquad \text{(selisih-maju)}$$

$$f_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h) \qquad \text{(selisih-mundur)}$$

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \qquad \text{(selisih-pusat)}$$

$$f_0' = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} + O(h^2) \qquad \text{(selisih-maju)}$$

$$f_0' = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4) \qquad \text{(selisih-pusat)}$$

2. Rumus untuk turunan kedua

$$f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2) \qquad \text{(selisih-pusat)}$$

$$f_0'' = \frac{f_{-2} - 2f_{-1} + f_0}{h^2} + O(h) \qquad \text{(selisih-mundur)}$$

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h) \qquad \text{(selisih-maju)}$$

$$f_0'' = \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{12h} + O(h^2) \qquad \text{(selisih-maju)}$$

$$f_0'' = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4) \qquad \text{(selisih-pusat)}$$

3. Rumus untuk turunan ketiga

$$f_0''' = \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{h^3} + O(h) \qquad \text{(selisih-maju)}$$

$$f_0''' = \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3} + O(h^2) \qquad \text{(selisih-pusat)}$$

4. Rumus untuk turunan keempat

$$f_0^{(iv)} = \frac{f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0}{h^4} + O(h) \qquad \text{(selisih-maju)}$$

$$f_0^{(iv)} = \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4} + O(h^2) \qquad \text{(selisih-pusat)}$$

Contoh

Diberikan data dalam bentuk tabel sebagai berikut :

x	$f(x)$
1.3	3.669
1.5	4.482
1.7	5.474
1.9	6.686
2.1	8.166
2.3	9.974
2.5	12.182

(a) Hitunglah $f'(1.7)$ dengan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^2)$ dan $O(h^4)$
(b) Hitunglah $f'(1.4)$dengan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^2)$
(c) Rumus apa yang digunakan untuk menghitung $f'(1.3)$ dan $f'(2.5)$?

Penyelesaian:

(a) Orde $O(h^2)$:

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

Ambil titik-titik $x_{-1} = 1.5$ dan $x_1 = 1.9$, yang dalam hal ini $x_0 = 1.7$ terletak di tengah keduanya dengan $h = 0.2$.

$$f'(1.7) = \frac{6.686 - 4.482}{2(0.2)} = 5.510 \qquad \text{(empat angka bena)}$$

Orde $O(h^4)$:

$$f_0' = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_2}{12h}$$

Ambil titik-titik x_{-2} = 1.3 dan x_{-1} = 1.5 , x_1 = 1.9, dan x_2 = 2.1, yang dalam hal ini x_0 = 1.7 terletak di pertengahannya.

$$f'(1.7) = \frac{-8.166 + 8(6.686) - 8(4.482) + 3.669}{12(0.2)}$$

$$= 5.473 \qquad \text{(4 angka bena)}$$

(b) Orde $O(h^2)$:

Ambil titik-titik x_{-1} = 1.3 dan x_1 = 1.5, yang dalam hal ini x_0 = 1.4 terletak di tengahnya dan h = 0.1.

$$f'(1.4) = \frac{4.482 - 3.669}{2(0.1)} = 4.065 \qquad \text{(4 angka bena)}$$

(c) Untuk menghitung $f\,'(1.3)$ digunakan rumus hampiran selisih-maju, sebab $x = 1.3$ hanya mempunyai titik-titik sesudahnya (maju), tetapi tidak memiliki titik-titik sebelumnya. Sebaliknya, untuk menghitung nilai $f\,'(2.5)$ digunakan rumus hampiran selisih-mundur, sebab $x = 2.5$ hanya mempunyai titik-titik sebelumnya (mundur).

Hampiran selisih-maju :

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$$

$$f\,'(1.3) = \frac{4.482 - 3.669}{0.2} = 4.065$$

Hampiran selisih-mundur :

$$f_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h)$$

$$f\,'(2.5) = \frac{12.182 - 9.974}{0.2} = 11.04$$

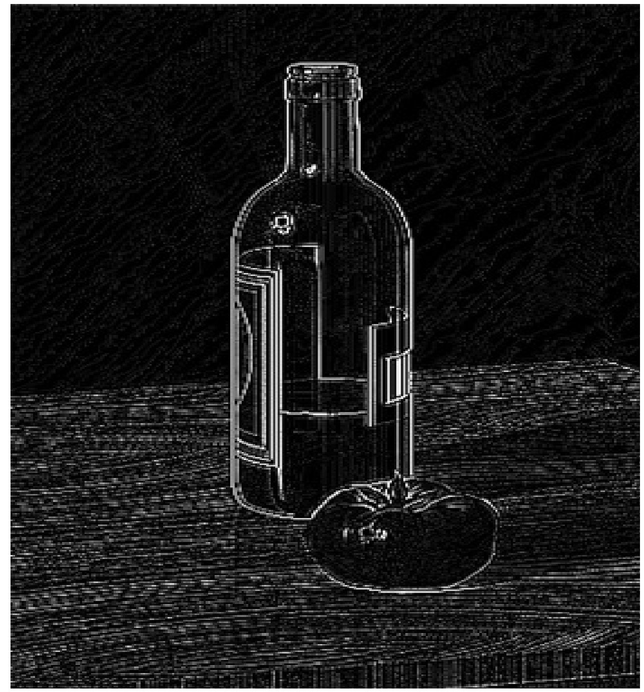
Terapan Turunan Numerik dalam Bidang Pengolahan Citra

- Citra digital dapat disajikan oleh matriks f yang berukuran $M \times N$ dengan bentuk

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{M1} & f_{M2} & \cdots & f_{MN} \end{bmatrix}$$

- Tiap elemen matriks adalah bilangan bulat dalam rentang [0..255] untuk citra 8 bit.

- Salah satu proses yang terdapat dalam pengolahan citra ialah pendeteksian tepi.
- Tepi merupakan *feature* yang penting pada suatu citra.
- Tepi didefinisikan sebagai perubahan intensitas yang besar dalam jarak yang singkat.
- Perbedaan intensitas inilah yang menampakkan rincian pada gambar. Tepi memberikan informasi batas-batas objek dengan lingkungannya atau dengan objek yang lain, *feature* untuk mengidentifikasi objek, dan untuk terapan penapisan citra.



- Salah satu pendekatamyang dipakai dalam pendeteksian sisi adalah dengan kemiringan diferensial (*differential gradient*).

- Secara matematis perubahan intensitas yang besar dalam jarak yang sangat singkat dapat dipandang sebagai suatu fungsi yang memiliki kemiringan yang besar.

- Pengukuran kemiringan suatu fungsi dilakukan dengan menghitung turunan pertamanya.

- Dalam citra digital, pendeteksian tepi dapat dilakukan dengan cara yang mirip, yaitu dengan turunan pertamanya secara parsial dalam ruang diskrit:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

- yang dalam hal ini kedua turunan parsial didefinisikan sebagai

$$D_1(x) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$D_1(y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \approx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Biasanya $\Delta x = \Delta y = 1$, sehingga persamaan turunan pertama menjadi:

$$D_1(x) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f(x+1, y) - f(x, y)$$

$$D_1(y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f(x, y+1) - f(x, y)$$

- Kekuatan tepi pada setiap *pixel* citra dihitung dengan rumus:

$$G[f(x,y)] = |\ f_x{}^2\ | \ + \ |\ f_y{}^2\ |$$

- atau dengan rumus

$$G[f(x,y)] = \max(\ f_x{}^2\ |\ ,\ |\ f_y{}^2\ |)$$

- Suatu *pixel* dianggap sebagai *pixel* sisi jika kekuatan tepinya di atas nilai ambang (*threshold*) tertentu.

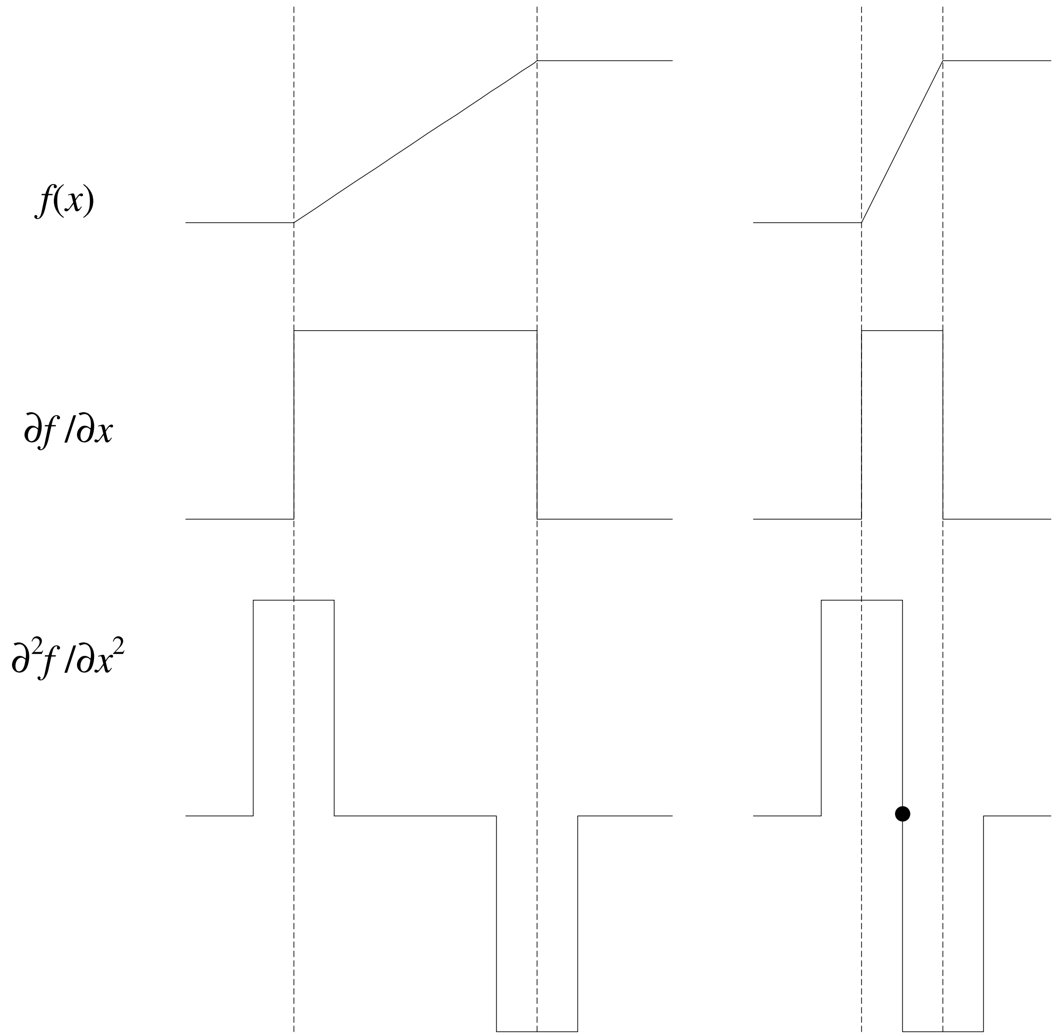
- $D_1(x)$ dan $D_1(y)$ merupakan hampiran selisih-maju. Hampiran lain yang dipakai adalah hampiran selisih-pusat, yaitu:

$$D_2(x) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$D_2(y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \approx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

- Operator lain yang digunakan untuk mendeteksi sisi adalah yang berdasarkan pada operasi turunan kedua, yang dikenal dengan operator Laplace (*Laplacian*).

- Operator Laplace mendeteksi lokasi tepi lebih akurat khususnya pada tepi yang curam.



(a) Tepi landai (b) Tepi curam

- Jika digunakan hampiran selisih-maju, maka operator Laplace diturunkan sebagai berikut:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= D_1(D_1(x)) + D_1(\ D_1(\ y))$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\ D_1\ (\ f(x + \Delta x,\ y) - D_1(\ f(x,y)) + \frac{1}{\Delta y}\ D_1(\ f(x,\ y + \Delta y) -$$

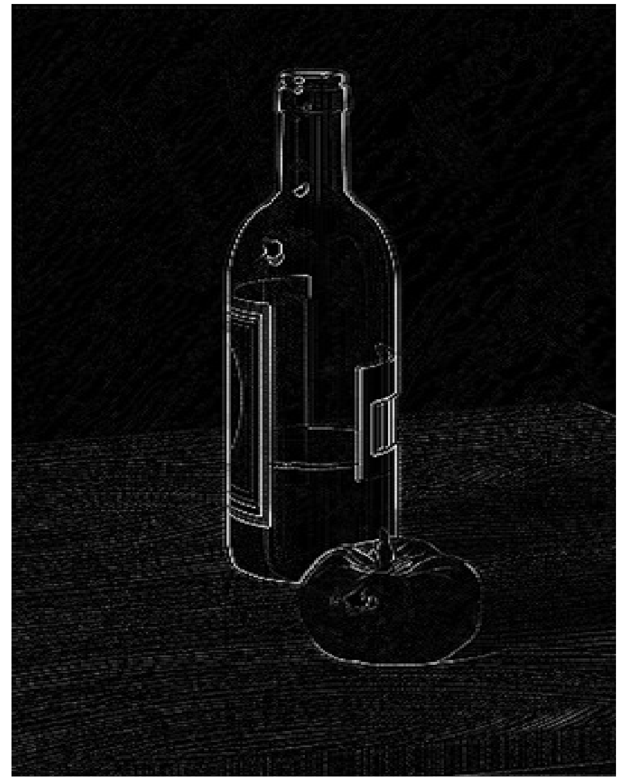
$$D_1(\ f(x,\ y))$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{f\left(x+\Delta x+\Delta x,\ y\right)-f\left(x+\Delta x,\ y\right)}{\Delta x}-\frac{f\left(x+\Delta x,\ y\right)-f\left(x,\ y\right)}{\Delta x}\right\} +$$

$$\frac{1}{\Delta y}\left\{\frac{f\left(x,\ y+\Delta y+\Delta y\right)-f\left(x,\ y+\Delta y\right)}{\Delta y}-\frac{f\left(x,\ y+\Delta y\right)-f\left(x,\ y\right)}{\Delta y}\right\}$$

$$= \frac{f\left(x+2\Delta x,\ y\right)-2f\left(x+\Delta x,\ y\right)+f\left(x,\ y\right)}{\left(\Delta x\right)^2} + \frac{f\left(x,\ y+2\Delta y\right)-2f\left(x,\ y+\Delta y\right)+f\left(x,\ y\right)}{\left(\Delta y\right)^2}$$


(a)


(b)

(a) citra botol; (b) hasil pendeteksian tepi dengan operator Laplace